

## Arbeitsblatt 4

### I Sekanten, Tangenten und elementare Ableitungsregeln

#### Beispiel 4.1 (Sekanten und Differenzenquotient)

Bestimme die Funktionsgleichung der Sekante von  $f_1$  und  $f_2$  im jeweils angegebenen Intervall  $I_1$  bzw.  $I_2$  und erstelle eine Skizze der Graphen.

a)  $f_1(x) = 2^x$ ,  $I_1 = [0; 3]$

b)  $f_2(x) = x^2 + 3$ ,  $I_2 = [-3; 4]$

#### Beispiel 4.2 (Ableiten von Polynomfunktionen)

Berechne mit der Konstanten-, Summen- und Potenzregel die Ableitungsfunktion der folgenden Polynomfunktionen  $p_i$ .

a)  $p_1(x) = -2x + 3$

c)  $p_3(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$

b)  $p_2(x) = x^2 - 3x + 5$

d)  $p_4(x) = \frac{1}{2}(x^4 - x^2 + x)$

#### Beispiel 4.3 (Tangentengleichung)

Bestimme für die vier Polynomfunktionen  $p_i$  aus Beispiel 4.2 jeweils die Funktionsgleichung der Tangente an der Stelle  $x_0 = 1$ .

**Hinweise zu Sekanten und Tangenten:** Wenn  $I$  ein reelles Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, dann besitzt für zwei Zahlen  $a, b \in I$  die *Sekante von  $f$  im Intervall  $[a, b]$*  die folgenden beiden (und gleichwertigen!) Funktionsgleichungen:

$$s(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - b) + f(b)$$

Dabei ist  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  der Differenzenquotient von  $f$  im Intervall  $[a, b]$ , der die mittlere Steigung bzw. mittlere Änderungsrate der Funktion in diesem Intervall beschreibt. Insbesondere gilt außerdem  $s(a) = f(a)$  und  $s(b) = f(b)$  wie man durch Einsetzen leicht verifizieren kann.

Wenn hingegen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sogar eine differenzierbare Funktion ist (d.h. es existiert eine Ableitungsfunktion  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ ), dann hat die *Tangente von  $f$  an der Stelle  $x_0 \in I$*  die Darstellung

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Die Tangente lässt sich als Grenzfall der Sekante interpretieren, wenn die Grenzen  $a$  und  $b$  beliebig nahe an die Stelle  $x_0$  heranrücken. Der Differentialquotient  $f'(x_0)$  (d.h. die Ableitung an der Stelle  $x_0$ ) wird als momentane Änderungsrate verstanden. Mit dieser Vorstellung wird die Tangente somit zur besten linearen Näherung von  $f$  in einer kleinen Umgebung von  $x_0$ . Insbesondere gilt  $t(x_0) = f(x_0)$ .

## II Fortgeschrittene Ableitungsregeln

### Beispiel 4.4 (Kettenregel)

Wende die Kettenregel an, um jeweils die Ableitungsfunktion der folgenden zusammengesetzten (verketteten) Funktionen zu bilden.

a)  $f_1(x) = e^{2x}$

c)  $f_3(x) = \ln(x^2)$

b)  $f_2(x) = 3^x$

d)  $f_4(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

### Beispiel 4.5 (Produktregel)

Berechne die Ableitungsfunktion durch Anwenden der Produktregel.

a)  $f_1(x) = (x + 1)(x - 3)$

c)  $f_3(x) = x^2 \ln(x)$

b)  $f_2(x) = xe^x$

d)  $f_4(x) = 2^x 3^x$

### Beispiel 4.6 (Quotientenregel)

Berechne die Ableitungsfunktion durch Anwenden der Quotientenregel.

a)  $f_1(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 1}$

b)  $f_2(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

c)  $f_3(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$

## Bonusaufgabe

### Beispiel 4.7 (Kosten- und Preistheorie)

Für eine Produktionsmenge  $x$  im Intervall von 0 bis 50 PE (Produktionseinheiten) können die Kosten  $K(x)$  (in GE) durch die Polynomfunktion  $K(x) = 0.01(x - 15)^3 + 0.75x + 90$  modelliert werden. Eine produzierte Einheit wird zum Preis von 7 GE pro PE verkauft.

- Bestimme die Erlösfunktion und Gewinnfunktion für dieses Modell, sowie anschließend die Gewinn Grenzen und alle Mengen  $x$ , für die kein Verlust gemacht wird.
- Bestimme den im Modell maximal möglichen Gewinn.
- Bestimme das Betriebsoptimum, d.h. jene Menge bei der die Stückkosten minimal sind.