Arbeitsblatt 3

I Polynom- und Betragsfunktion, Gleichungen und Ungleichungen

Beispiel 3.1 *(Polynomfunktionen und quadratische Gleichungen)*

Bestimme die Nullstellen der folgenden Polynomfunktionen $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und stelle die Funktionsgleichungen anschließend zerlegt in Linearfaktoren dar.

a) $p_1(x) = x^2 - 4x + 4$

b) $p_2(x) = -2x^2 - 4x + 6$

c) $p_3(x) = 2x^2 + 3x - 2$

d) $p_4(x) = 4x^4 - 4x^3 + x^2$

e) $p_5(x) = (2 - x) \cdot (x^2 - x - 6)$

Erstelle auch jeweils eine qualitative Skizze der Funktionsgraphen von p_i (d.h. die wesentlichen Merkmale der Funktionen sollen im Graphen erkennbar sein).

Beispiel 3.2 *(Übung zu Ungleichungen)*

Bestimme jeweils die Lösungsmenge $\mathscr{L}$ der gegebenen Ungleichungen, wobei $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktionen in Beispiel 3.1 sind. Verwende dabei die bereits bekannten Eigenschaften dieser Funktionen.

a) $p_1(x) \geq 0$

b) $p_1(x) < 0$

c) $p_2(x) > 0$

d) $p_2(x) \leq 0$

e) $p_3(x) > 0$

f) $p_4(x) \leq 0$

g) $p_4(x) > 0$

h) $p_5(x) \leq 0$

i) $p_5(x) > 0$

Beispiel 3.3 *(Betragsfunktion und Ungleichungen)*

Erstelle zunächst eine Zeichnung von den Graphen der gegebenen Betragsfunktionen $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bestimme damit grafisch die Lösungsmenge $\mathscr{L}$ der unten angegebenen Gleichungen und Ungleichungen.

$$b_1(x) = |x - 2| \qquad b_2(x) = 2 \cdot |x + 2| \qquad b_3(x) = 3 - |x - 1|$$

a) $b_1(x) = 2$

b) $b_1(x) < 2$

c) $b_1(x) \geq 2$

d) $b_2(x) \leq 0$

e) $b_2(x) = 5$

f) $b_2(x) > 5$

g) $b_3(x) \geq 4$

h) $b_3(x) = 0$

i) $b_3(x) \geq 0$

II Exponentielles Wachstum und Logarithmen

Beispiel 3.4 *(Arithmetische und geometrische Folge)*

Ein Bestand K (z.B. ein Kapital) nimmt in 5 diskreten Schritten von 1000 Einheiten (z.B. Dollar, Geldeinheiten, ...) auf 1338 Einheiten zu. Beschreibe diesen Zusammenhang durch...

a) ... ein lineares Modell (arithmetische Folge).

b) ... ein exponentielles Modell (geometrische Folge).

Bemerkung: Diskret bedeutet, dass Wachstum in einzelnen, zeitlich separierten Schritten erfolgt.

Beispiel 3.5 *(Exponentialfunktion)*

Stelle die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $\exp(x) = e^x$ und die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \text{ mit } f(x) = e^{0.1x}, \quad \text{sowie} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \text{ mit } g(x) = 0.5 \cdot e^x$$

grafisch dar (qualitativ und in drei seperaten Grafiken).

Zeichne weiters die jeweilige Umkehrfunktion (Logarithmusfunktion) in den Grafiken ein.

Beispiel 3.6 *(Kontinuierliche exponentielle Modelle)*

Beschreibe zwei kontinuierliche/stetige exponentielle Modelle, in denen sich ein Bestand innerhalb von 6.5 Zeiteinheiten

a) um 20% erhöht,

b) um 20% verringert,

in den beiden Darstellungen $y_0 \cdot a^t$ und $y_0 \cdot e^{\lambda t}$.

Bemerkung: Kontinuierliche Progressionen sind dadurch charakterisiert, dass in jedem noch so kleinen betrachteten Zeitintervall eine Veränderung (Wachstum/Abnahme) erfolgen kann.

Beispiel 3.7 *(Anwendung: exponentielles Wachstum in der Finanzmathematik)*

Es gibt fünf typische Fragestellungen, die mit einfachen exponentiellen Modellen in der Finanzmathematik beantwortet werden können. Finde zu den untenstehenden Überlegungen jeweils die passende Methode (d.h. die Gleichung, die die Frage beschreibt) und anschließend die Lösung.

a) Welches Kapital ist nach 7 Zinsperionden vorhanden, wenn ein Startkapital von 500 GE zu 6% (pro Zinsperiode) verzinst wird?

b) Welches anfängliche Kapital muss verzinst werden, um bei einem Zinssatz von 3% und einer Laufzeit von 9 Zinsperioden insgesamt 800 GE am Konto zu haben.

c) Welches Startkapital braucht man in der Situation in (b), um 300 GE reicher zu sein?

d) Welcher Zinssatz ist nötig, wenn sich das Startkapital innerhalb von 12 Zinsperioden um 50% vermehren soll?

e) Nach welcher Zeit (Anzahl Zinsperioden) ist ein Kapital um ein Drittel angewachsen, wenn der Zinssatz 2.8% pro Periode beträgt?

Bemerkung: Es wird hier stets von **nachschüssiger Verzinsung** ausgegangen, d.h. die Zinsen werden am Ende einer jeden Zinsperiode berechnet und ausgezahlt.

Beispiel 3.8 *(Exponentialgleichungen)*

Mit dem Begriff *Exponentialgleichung* soll hier eine Gleichung $a^x = y$ gemeint sein, in der $a > 0$ und $y > 0$ bekannte Zahlen sind und $x \in \mathbb{R}$ die Unbekannte ist, die man finden will. Eine solche Exponentialgleichung ist gleichbedeutend mit der Darstellung $x = \log_a(y)$.

In Worten: Die Frage *"a hoch wieviel ist gleich y?"* hat die Lösung $\log_a(y)$.

Berechne die folgenden Logarithmuswerte (ohne Taschenrechner), indem du auf die Darstellung $a^x = y$ umformst und überlegst, für welches x die Potenz a^x den Wert y hat.

a) $\log_{10}(100) =$

b) $\log_{10}(1\,000\,000) =$

c) $\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right) =$

d) $\log_{10}(0.001) =$

e) $\log_{10}(\sqrt{100}) =$

f) $\log_2(32) =$

g) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) =$

h) $\log_2(0.25) =$

Beispiel 3.9 *(Rechenregeln für Logarithmen)*

Forme die gegebenen Terme so um, dass du deren Wert ohne Taschenrechner bestimmen kannst.

a) $\log_{10}(25) + \log_{10}(4) =$

b) $\log_{12}(72) - \log_{12}(6) =$

c) $2 \cdot \log_4(8) =$

d) $\frac{1}{3} \cdot \log_{10}(125) + \frac{1}{2} \cdot \log_{10}(4) =$