Rekonstruktion der Tafelmitschrift vom 7.3.2024 (Basistutorium WiMa)

Potenzen sind Ausdrücke der Form a^q ← Exponent / Hochzahl; a ↑ Basis / Grundzahl $\quad (a \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{Q})$

Bedeutung für natürliche Exponenten $(n \in \mathbb{N})$: $\quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal mit sich selbst multipliziert}}$

Bsp: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Rechenregeln (Teil 1):

$\boxed{1}$: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad$ … intuitive Begründung: $a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ mal}}}_{\text{insgesamt } m+n \text{ mal}} = a^{m+n}$

$\boxed{2}$: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad$ (Umkehrung von Regel $\boxed{1}$)

$\boxed{3}$: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\quad$ (Erweiterung von R. $\boxed{1}$)

Übung: $\quad$ 1) $\dfrac{2^3 \cdot 2^5}{2}$, $\quad$ 2) $\left(\dfrac{5^3 \cdot 5^2}{5^6}\right)^3$, $\quad$ 3) $\left(\dfrac{3 \cdot 3^2 \cdot 3^3}{3^5 \cdot 3^2}\right)^2$

LÖSUNGEN:

1) $2^{3+5-1} = 2^7 = 128$

2) $(5^{3+2-6})^3 = 5^{(-1) \cdot 3} = 5^{-3} = \ldots ?$

3) $\left(\dfrac{3^1 \cdot \cancel{3^{2+3}}}{3^2 \cdot \cancel{3^5}}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{3 \cdot 3}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3 \cdot 3} = \dfrac{1}{3^2}$

Aus Übung 2) und 3) sowie aus Gründen der Konsistenz zu den Regeln $\boxed{1}$ - $\boxed{3}$ sehen wir die Notwendigkeit für die Regel Nr. $\boxed{4}$ (und in Konsequenz Regel $\boxed{4B}$):

Rechenregeln (Teil 2)

$\boxed{4}$: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\quad$ Bsp: $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$ (Vorsicht: $\neq -125$!)

$\boxed{4B}$: $a^0 = 1$ $\quad$ Begründung: $a^0 = a^{n-n} = \dfrac{a^n}{a^n} = \dfrac{1}{1} = 1$

Bemerkung: $\boxed{4}$ und $\boxed{4B}$ sind im Fall $a=0$ nicht anwendbar.

Definition: Die "n-te Wurzel einer Zahl $y > 0$" (schreib: $\sqrt[n]{y}$) ist die eindeutige positive Zahl x für die gilt: $x^n = y$

(salopp: die n-te Wurzel ist die Umkehrung des Potenzierens mit Hochzahl n)

Bsp: $\sqrt[2]{9} \; (= \sqrt{9}) = 3$ weil $3^2 = 9$

$\sqrt[3]{64} = 4$ weil $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$

Vorsicht: $\sqrt{25} \neq \pm 5$ .... dieses Missverständnis kommt daher, dass die Gleichung "$x^2 = 25$" die zwei Lösungen $x_1 = -5$ und $x_2 = +5$ hat. Aber n-te Wurzeln positiver Zahlen müssen immer positiv sein (laut Definition) und auch eindeutig.

Rechenregeln (Teil 3):

$\boxed{5}$: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

... Begründung: $\sqrt[n]{x^n} = x$, aber auch lt. $\boxed{3}$: $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x^{n \cdot \frac{1}{n}} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$

$\rightarrow$ als Konsequenz von $\boxed{3}$ müssen wir $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ als Schreibweise für Wurzeln akzeptieren.

$\boxed{6}$: $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}^{\,m}$

Übungen (siehe AB 2):

A2.8: a) $(x^2 y)^3 \cdot \frac{(xy^2)^3}{(xy)^5} \overset{\boxed{*}}{=} (x^{2 \cdot 3} \cdot y^3) \cdot \frac{x^3 \cdot y^{2 \cdot 3}}{(xy)^5} = \frac{x^{6+3} \cdot y^{3+6}}{(xy)^5} = \ldots$

$\ldots = \frac{x^9 \cdot y^9}{(xy)^5} = \frac{(xy)^9}{(xy)^5} = (xy)^{9-5} = (xy)^4$

Bemerkung: Warum gilt die Regel $\boxed{*}$, dass $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$?

$\rightarrow$ Anschaulich am Beispiel erklärbar:

$$(x^2 \cdot y)^3 = (x^2 \cdot y) \cdot (x^2 \cdot y) \cdot (x^2 \cdot y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kommutativ- und} \\ \text{Assoziativgesetz}}}{=} x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot y \cdot y \cdot y = (x^2)^3 \cdot y^3$$

Exkurs: Doppelbrüche: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \underbrace{\dfrac{d}{c}}_{\text{Kehrwert von } \frac{c}{d}}$

"Division durch den Bruch $\frac{c}{d}$ entspricht der Multiplikation mit dem Kehrwert $\frac{d}{c}$."

Begründung am Beispiel: $\frac{2}{7} : x = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$ (eine Zahl durch sich selbst ergibt immer 1)

aber auch: $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow$ Die Operationen "$: \frac{2}{7}$" und "$\cdot \frac{7}{2}$" bewirken also das Gleiche".

Übungen:

A2.8: f) $\left(\dfrac{f^3 \cdot g^2}{f^5 \cdot g^{-1}}\right)^4 \cdot \dfrac{g^{-2}}{f^3} = \left(f^{\overbrace{3-5}^{-2}} \cdot g^{\overbrace{2-(-1)}^{3}}\right)^4 \cdot g^{-2} \cdot f^{-3} = f^{(-2)\cdot 4} \cdot g^{3\cdot 4} \cdot g^{-2} \cdot f^{-3} = \ldots$

$\ldots = f^{-8+(-3)} \cdot g^{12+(-2)} = f^{-11} \cdot g^{10} \quad \left(= \dfrac{g^{10}}{f^{11}}\right)$

b) $(2ab^2)^3 - \dfrac{3a^4 b^7}{ab} = 2^3 a^3 \cdot b^{2\cdot 3} - 3a^{4-1} \cdot b^{7-1} = 8\underbrace{a^3 b^6} - 3\underbrace{a^3 b^6} = \ldots$

$\ldots = 5 \cdot \underbrace{a^3 b^6} \quad \left(= 5(ab^2)^3\right)$

---

online-Rechner zur Selbstkontrolle + Lösungsweg: wolframalpha.com
(→ Empfehlung: Smartphone-App um wenige €)