Arbeitsblatt 4

I Sekanten, Tangenten und elementare Ableitungsregeln

Beispiel 4.1 *(Sekanten und Differenzenquotient)*

Bestimme die Funktionsgleichung der Sekante von f_1 und f_2 im jeweils angegebenen Intervall I_1 bzw. I_2 und erstelle eine Skizze der Graphen.

a) $f_1(x) = 2^x, \quad I_1 = [0;\, 3]$

b) $f_2(x) = x^2 + 3, \quad I_2 = [-3;\, 4]$

Beispiel 4.2 *(Ableiten von Polynomfunktionen)*

Berechne mit der Konstanten-, Summen- und Potenzregel die Ableitungsfunktion der folgenden Polynomfunktionen p_i.

a) $p_1(x) = -2x + 3$

b) $p_2(x) = x^2 - 3x + 5$

c) $p_3(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$

d) $p_4(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^4 - x^2 + x\right)$

Beispiel 4.3 *(Tangentengleichung)*

Bestimme für die vier Polynomfunktionen p_i aus Beispiel 4.2 jeweils die Funktionsgleichung der Tangente an der Stelle $x_0 = 1$.

Hinweise zu Sekanten und Tangenten: Wenn I ein reelles Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann besitzt für zwei Zahlen $a, b \in I$ die *Sekante von f im Intervall* $[a,\, b]$ die folgenden beiden (und gleichwertigen!) Funktionsgleichungen:

$$s(x) \quad = \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a) \quad = \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - b) + f(b)$$

Dabei ist $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der Differenzenquotient von f im Intervall $[a,\, b]$, der die mittlere Steigung bzw. mittlere Änderungsrate der Funktion in diesem Intervall beschreibt. Insbesondere gilt außerdem $s(a) = f(a)$ und $s(b) = f(b)$ wie man durch Einsetzen leicht verifizieren kann.

Wenn hingegen $f : I \to \mathbb{R}$ sogar eine differenzierbare Funktion ist (d.h. es existiert eine Ableitungsfunktion $f' : I \to \mathbb{R}$), dann hat die *Tangente von f an der Stelle* $x_0 \in I$ die Darstellung

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Die Tangente lässt sich als Grenzfall der Sekante interpretieren, wenn die Grenzen a und b beliebig nahe an die Stelle x_0 heranrücken. Der Differentialquotient $f'(x_0)$ (d.h. die Ableitung an der Stelle x_0) wird als momentane Änderungsrate verstanden. Mit dieser Vorstellung wird die Tangente somit zur besten linearen Näherung von f in einer kleinen Umgebung von x_0. Insbesondere gilt $t(x_0) = f(x_0)$.

II Fortgeschrittene Ableitungsregeln

Beispiel 4.4 *(Kettenregel)*

Wende die Kettenregel an, um jeweils die Ableitungsfunktion der folgenden zusammengesetzten (verketteten) Funktionen zu bilden.

a) $f_1(x) = e^{2x}$

b) $f_2(x) = 3^x$

c) $f_3(x) = \ln(x^2)$

d) $f_4(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

Beispiel 4.5 *(Produktregel)*

Berechne die Ableitungsfunktion durch Anwenden der Produktregel.

a) $f_1(x) = (x+1)(x-3)$

b) $f_2(x) = xe^x$

c) $f_3(x) = x^2 \ln(x)$

d) $f_4(x) = 2^x 3^x$

Beispiel 4.6 *(Quotientenregel)*

Berechne die Ableitungsfunktion durch Anwenden der Quotientenregel.

a) $f_1(x) = \dfrac{3x^2+1}{x-1}$

b) $f_2(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$

c) $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$

Bonusaufgabe

Beispiel 4.7 *(Kosten- und Preistheorie)*

Für eine Produktionsmenge x im Intervall von 0 bis 50 PE (Produktionseinheiten) können die Kosten $K(x)$ (in GE) durch die Polynomfunktion $K(x) = 0.01(x-15)^3 + 0.75x + 90$ modelliert werden. Eine produzierte Einheit wird zum Preis von 7 GE pro PE verkauft.

a) Bestimme die Erlösfunktion und Gewinnfunktion für dieses Modell, sowie anschließend die Gewinngrenzen und alle Mengen x, für die kein Verlust gemacht wird.

b) Bestimme den im Modell maximal möglichen Gewinn.

c) Bestimme das Betriebsoptimum, d.h. jene Menge bei der die Stückkosten minimal sind.