Arbeitsblatt 2

I Lineare Funktionen und Gleichungen

Beispiel 2.1 *(Homogene lineare Funktionen und Gleichungen in $\mathbb{R}$ ("echt linear"))*

Eine Firma verkauft einen Werkstoff um 1.60 € pro kg.

a) Gib die Funktion E an, die den Zusammenhang zwischen verkaufter Menge x und dem zugehörigen Erlös $E(x)$ beschreibt.

b) Bestimme zuerst durch einfaches Schlussrechnen (Dreisatzrechnen) und dann durch Lösen der entsprechenden Gleichung ...

  (i) ... welcher Erlös beim Verkauf von 500 kg Werkstoff erwirtschaftet wird.

  (ii) ... welche Menge verkauft werden muss, um einen Erlös von 2000 € zu erzielen.

Beispiel 2.2 *(Inhomogene lineare Funktionen und Gleichungen in $\mathbb{R}$ ("affin linear"))*

Ein kleines IT-Startup will eine Online-Dienstleistung anbieten. Dabei entstehen Kosten durch eine anfängliche Investition von 18 000 € bei der Firmengründung (für PCs, Server, Büromöbel, ...). Weiters sind pro Woche 300 € für Miete und Strom, sowie insgesamt wöchentlich 1200 € für die Gehälter der Angestellten zu zahlen.

a) Gib die Funktion K an, die den Zusammenhang zwischen der Zeit x ab Firmengründung und den insgesamt bis dahin entstandenen Kosten $K(x)$ beschreibt.

b) Welche Gesamtkosten entstehen in diesem Modell innerhalb eines Jahres?

c) Das Startup bekommt bereits bei der Gründung einen großen Auftrag über 42 000 €. Es wird davon ausgegangen, dass mit kleineren Nachfolgeaufträgen die Kosten mehr als gedeckt werden können. In welcher Zeit muss der große Auftrag mindestens erledigt werden, damit die Firma nach Abschluss des großen Auftrags sofort gewinnbringend arbeitet?

Beispiel 2.3 *(Übung zu linearen Gleichungen in $\mathbb{R}$)*

Löse mit entsprechenden Term- und Äquivalenzumformungen die folgenden Gleichungen nach x.

a) $3x - 16 = 11$ b) $5 - 7x = -3 \cdot (x - 11)$ c) $\dfrac{2x - 12}{5} = 6 - x$

Beispiel 2.4 *(Lineare Abbildungen mit Matrizen ($A\vec{x} = \vec{y}$) und lineare Gleichungssysteme)*

Zwei Erzeugnisse E1 und E2 werden unter Einsatz von zwei Bearbeitungsmaschinen M1 und M2 produziert. Eine Produktionseinheit (PE) von E1 benötigt 3 Zeiteinheiten (ZE) auf M1 und 5 ZE auf M2, während E2 pro PE 4 ZE auf M1 und 2 ZE auf M2 benötigt.

a) Stelle den Zusammenhang (Funktion) zwischen der Produktionsmenge $\vec{x}$ und der auf den verschiedenen Maschinen erforderliche Zeit $\vec{y}$ mithilfe der Matrix A dar.

b) Bestimme damit nun die benötigte Arbeitszeit für die Menge $\vec{x} = (10,\, 8)^T$.

c) Da für einen bestimmten Zeitabschnitt die Dokumentation über die produzierte Menge $\vec{x}$ verlorengegangen ist, wird versucht, sie aus dem Protokoll der Maschinenlaufzeit zu rekonstruieren. Welche Menge wurde produziert, wenn die Maschinenlaufzeit mit $\vec{y} = (55,\, 45)^T$ bekannt ist?

Beispiel 2.5 *(Übung zu linearen Gleichungssystemen (LGS))*

a) Löse für $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 12 \\ 28 \end{pmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} 33 \\ 17 \end{pmatrix}$ die beiden Gleichungssysteme $A \cdot \vec{w} = \vec{y}$ bzw. $A \cdot \vec{x} = \vec{z}$ nach $\vec{w}$ bzw. $\vec{x}$ *(Tipp: man kann beide LGS gleichzeitig lösen!)*.

b) Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ nach $\vec{x}$, wenn $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$ ist.

Beispiel 2.6 *(Lösbarkeit von Gleichungssystemen)*

Es wird das folgende Gleichungssystem betrachtet:

$$\begin{aligned} I: &\quad 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ II: &\quad -4x_1 + ax_2 = b \end{aligned}$$

Dabei sind a und b reelle Zahlen. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat das LGS

(i) unendlich viele Lösungen,

(ii) keine Lösung,

(iii) genau eine Lösung?

Diskutiere auch die grafische Überlegung hinter der Lösbarkeit im $\mathbb{R}^2$ und bestimme abhängig von a die Lösung im Fall (iii).

II Potenzfunktionen und Rechnen mit Potenzen und Wurzeln

Beispiel 2.7 *(Einfache Potenzgleichungen)*

Finde alle Nullstellen der gegebenen Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; d.h. die Lösungsmenge $\mathscr{L}$ von $f_i(x) = 0$:

a) $f_1(x) = x^2 - 4$

b) $f_2(x) = 3x^3 + 24$

c) $f_3(x) = x^2 + 16$

d) $f_4(x) = x^4 - 1$

e) $f_5(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 50$

Beispiel 2.8 *(Umkehrfunktion)*

Bestimme jeweils die Umkehrfunktion der in Beispiel 2.7 gegebenen Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und schränke dabei Definitions- und Wertemenge ein, falls nötig.

Beispiel 2.9 *(Rechnen mit Potenzen und Wurzeln)*

Vereinfache die folgenden Zahlenterme ohne Taschenrechner.

a) $3^2 \cdot 3^3 =$

b) $\dfrac{2^{13}}{2^7} =$

c) $(7^6)^{\frac{1}{3}} =$

d) $4^{-3} \cdot 2^{10} =$

e) $(5^3)^7 : (5^4)^5 \cdot \sqrt{5^6} =$

f) $\left(\dfrac{4}{6}\right)^3 : 4^2 \cdot 6^4 =$

Beispiel 2.10 *(Umformen von Potenztermen)*

Forme die gegebenen Terme in eine möglichst einfache Darstellung um.

a) $(x^2y)^3 \cdot \dfrac{(xy^2)^3}{(xy)^5} =$

b) $(2ab^2)^3 - \dfrac{3a^4b^7}{ab} =$

c) $(c^2d)^{-1} \cdot 4c^{-1}d^3 =$

d) $\left(\dfrac{f^3g^2}{f^5g^{-1}}\right)^4 \cdot \dfrac{g^{-2}}{f^3} =$

e) $\sqrt{18 \cdot \sqrt[3]{8h^2}} =$

f) $\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt[3]{z^2}}{\sqrt{z}}\right)^4} =$

III Elementares Rechnen

Beispiel 2.11 *(Binomische Formeln)*

Forme in (a)-(c) durch Ausmultiplizieren um, sowie in (d)-(f) durch Herausheben bzw. Faktorisieren.

a) $(7x+5)^2 =$

b) $(x^2-4)^2 =$

c) $(3-2x)\cdot(2x+3) =$

d) $y^2+4y+4 =$

e) $9-12y+4y^2 =$

f) $-25+z^6 =$

Beispiel 2.12 *(Bruchterme vereinfachen und zusammenfassen)*

Führe die gegebenen Rechnungen aus und kürze, wenn möglich (die Eins herausheben, also $1 = \frac{a}{a}$).

a) $\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{8} =$

b) $6 \cdot \dfrac{2}{3} =$

c) $\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{6}{10} =$

d) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{6} =$

e) $\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{6} =$

f) $\dfrac{7}{5}-\dfrac{3}{4} =$

g) $\dfrac{2}{3} : 4 =$

h) $\dfrac{4}{3} : \dfrac{8}{9} =$

i) $\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{10}} =$