Arbeitsblatt 1

I Rechenregeln in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ und Umformung von Termen

Beispiel 1.1 *(Neutrale bzw. inverse Elemente und Basisgleichungen)*

Löse die folgenden Gleichungen, d.h. finde jeweils die Zahl $x \in \mathbb{R}$, sodass die Gleichung stimmt.

a) $5 + x = 0$

b) $-7 + x = 0$

c) $2 \cdot x = 1$

d) $\frac{1}{3} \cdot x = 1$

e) $\frac{3}{5} \cdot x = 1$

f) $(-5) \cdot x = 1$

g) $-\frac{7}{4} \cdot x = 1$

A) $4x - 3 = 17$

B) $10 - 2x = 6x + 26$

C) $\frac{x}{2} - 5 = 3x$

Beispiel 1.2 *(Vorrangregeln)*

Berechne den Wert der folgenden Zahlenterme.

a) $38 + 5 \cdot (-7 + 3)$

b) $28 : \big(11 + (-4)\big) - 5 \cdot 3$

c) $-8 - (13 - 21) \cdot 2$

d) $(5 - 11) \cdot (3 \cdot 2 - 8)$

e) $24 : (6 : 2) : 4$

Beispiel 1.3 *(Terme vereinfachen)*

Die folgenden drei Terme sollen durch Verwendung der Rechenregeln für die Grundrechenarten (+ und $\cdot$) durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen umgeformt werden. Dazu werden die Kommutativgesetze, Assoziativgesetze und das Distributivgesetz angewendet.

a) $2(a - 3b) - 3(2a - 5b)$

b) $4c + 6d : 2 - (6c + 9d) : 3$

c) $x(2y + 5) - 3y(2 + 5x)$

II Grundlagen der Vektorrechnung

Beispiel 1.4 *(Rechnen mit Vektoren im $\mathbb{R}^2$)*

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Führe für die folgenden Terme jeweils die Vektoraddition bzw. skalare Multiplikation rechnerisch und grafisch durch. (Vorsicht: skalare Multiplikation $\neq$ Skalarprodukt!)

a) $2 \cdot \vec{c}$

b) $-3 \cdot \vec{b}$

c) $\frac{1}{2} \cdot \vec{a}$

d) $\vec{a} + \vec{b}$

e) $\vec{a} - \vec{b}$

f) $-\vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \vec{a}$

g) $5 \cdot (2 \cdot \vec{b} - 3 \cdot \vec{c})$

Beispiel 1.5 *(Skalarprodukt und Betrag von Vektoren)*

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$: $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

Berechne alle möglichen Skalarprodukte aus den drei Vektoren sowie ihren Betrag.
(Vorsicht: Skalarprodukt $\neq$ skalare Multiplikation!)

Beispiel 1.6 *(Multiplikation von Matrix mal Vektor)*

Berechne die folgenden Matrixprodukte. Prüfe vorher auch die Dimension der vorkommenden Matrizen (bzw. Vektoren = $n \times 1$-Matrizen) und überlege anhand dessen die Dimension des Produkts.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Zusatz: Es sei nun $p = \begin{pmatrix} 5 & 8 \end{pmatrix}$ eine Kostenmatrix und $x = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$ eine Erzeugnismatrix.

Das soll heißen, dass die beiden Matrizen folgende Informationen zusammenfassen: Erzeugt werden 15 Produktionseinheiten (PE) vom Erzeugnis Nr. 1 zu je 5 Geldeinheiten pro PE sowie 12 PE von Erzeugnis Nr. 2 zu je 8 GE pro PE.

Stelle die Gesamtkosten durch (i) eine Matrixmultiplikation und (ii) durch ein Skalarprodukt dar.

Beispiel 1.7 *(Anwendung: Matrixabbildungen in der Produktionsplanung)*

Alice und Bob planen die Produktion für ihren Erfrischungsstand im örtlichen Schwimmbad. Aus drei Rohstoffen (Zitronen, Zucker, Sodawasser) erzeugen sie zwei Produkte (Limonade und Zitronensorbet). Die benötigten Rohstoffmengen (in Rohstoffeinheiten RE) pro Produktionseinheit (PE) der beiden Erzeugnisse stehen in der folgenden Tabelle:

	RE/PE Limo	RE/PE Sorbet
Zitronen	3	1
Zucker	2	4
Soda	5	0

a) Berechne, welche Rohstoffmengen für 10 PE Limonade und 8 PE Sorbet-Eis benötigt werden.

b) Berechne die Rohstoffmengen y_1, y_2, y_3 allgemein für x_1 PE Limonade und x_2 PE Sorbet.

c) Gib die Matrixabbildung vom Typ $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ an, die jeder Produktionsmenge $\vec{x}$ die zugehörige Rohstoffmenge $\vec{y}$ zuordnet.

III Matrizenrechnung

Beispiel 1.8 *(Multiplikation zweier Matrizen)*

Prüfe die Dimension der Matrizen und berechne falls möglich die angegebenen Produkte.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 8 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Beispiel 1.9 *(Addition und skalare Multiplikation bei Matrizen)*

Reduziere die folgenden Matrixterme so weit wie möglich:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

b) $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Zusatz: Überlege zu (a)-(c) konkrete Beispiele, wo die Addition und die skalare Multiplikation von Matrizen in der Wirtschaft zum tragen kommt. Tipp: vergleiche mit Aufgabe 6 und 7.

Beispiel 1.10 *(Matrixgleichungen)*

Löse die gegebenen Matrixgleichungen für die Matrix X. Es sollen dabei die Dimensionen der vorkommenden Matrizen stets passend sein, um die Multiplikation zu erlauben. Dabei ist E stets eine Einheitsmatrix und A, B, C, D sind beliebige <u>invertierbare</u> Matrizen. *Aber Vorsicht:* Man kann nicht in dem Sinne durch Matrizen dividieren, wie das bei Zahlen der Fall ist!

a) $AX + B = C$

b) $A + B(X - 2E) = 3A$

c) $AXB^{-1}C = ED$

Beispiel 1.11 *(Anwendung: Matrixgleichungen in der Produktionsplanung)*

Es wird die Abbildung eines Produktionsvektors $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ auf den Rohstoffvektor $\vec{y} = (y_1, y_2)^T$ gegeben durch $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ und die Matrix A (vgl. Beispiel 1.7). Weiters soll bekannt sein, dass A invertierbar ist und die inverse Matrix A^{-1} bereits bestimmt wurde. Es gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Berechne die benötigte Rohstoffmenge für die Produktionsmenge $x_1 = 7$ PE und $x_2 = 5$ PE.

b) Welche Produktionsmenge lässt sich genau erzeugen (ohne, dass Rohstoffe überbleiben), wenn die Rohstoffmenge $y_1 = 38$ RE und $y_2 = 46$ RE vorhanden ist?

c) Es werde nun eine *"Charge"* als die Produktionsmenge $\vec{x} = (8, 12)^T$ definiert. Produziert wird an zwei Standorten: An Standort 1 werden 20 Chargen pro Woche erzeugt und 15 Chargen an Standort 2.

   In einer bestimmten Woche ist aufgrund von Personalmangel die Produktionsleistung von Standort 2 um 20% geringer. Am Standort 1 verursacht hingegen ein ungeschickter Praktikant einen um 25% höheren Ressourcenverbrauch.

   Berechne die gesamten in dieser Woche verbrauchten Ressourcen $\vec{r}$.

d) Berechne durch eine geeignete Matrixoperation den Gewinn der Produktion in (c), wenn Produkt 1 um 3 Geldeinheiten (GE) pro PE und Produkt 2 um 4 GE pro PE verkauft werden kann.

Bemerkung: Die Situation in (b) ist natürlich nicht realistisch, denn diese Umkehraufgabe lässt sich nur dann exakt lösen, wenn A invertierbar ist, was prinzipiell nur bei quadratischen Matrizen der Fall ist (hier bedeutet das, dass es gleich viele verschiedene Rohstoffe wie Produkte gibt). Wenn A zwar quadratisch ist, aber nicht invertierbar (wenn $\det(A) = 0$) existiert keine inverse Matrix), dann kann die Aufgabe entweder unlösbar, oder nicht eindeutig lösbar sein.

Es ist auch nicht gesagt, dass die exakte Ausnutzung der Ressourcen das erwünschte Ergebnis der Produktionsplanung ist. Typischerweise orientiert man sich an Zielen wie etwa der Gewinnmaximierung, Kostenminimierung, Schadstoffminimierung, Leistungsmaximierung, usw. Solche Überlegungen sind Untersuchungsgegenstand der Linearen Optimierung und erfordert spezielle Algorithmen und andere Vorgehensweisen.