Übersicht über grundlegende Strukturen

1 Rechenregeln für reelle Zahlen

Hier beschäftigen wir uns mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammen mit den beiden Operationen Plus (Addition $+$) und Mal (Multiplikation $\cdot$). Man nennt $\mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$ auch *Körper der reellen Zahlen*, welcher eine operative Struktur mit ganz bestimmten Eigenschaften darstellt.

Was ist denn mit 'Operation' überhaupt gemeint? Wenn wir zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ wählen (genauer gesagt das Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), dann erhalten wir nach Durchführung einer Operation ein neues Objekt. Im Körper der reellen Zahlen erhält man dabei wieder ein Element der reellen Zahlen - man sagt deshalb, dass $\mathbb{R}$ bezüglich Plus und Mal arithmetisch abgeschlossen ist. Für die Operationen bzw. deren Resultate wird die Notation $x + y$ und $x \cdot y$ verwendet.

Die im Folgenden 9 Rechenregeln müssen wir voraussetzen, damit diese Operationen (und in weiterer Folge Subtraktion und Division) so reibungslos funktionieren, wie wir das von ihnen erwarten.

1.1 Die Kommutativgesetze

Die Kommutativgesetze (Vertauschungsgesetze) besagen, dass wir die Argumente bei der Addition und Multiplikation vertauschen können.

$$x + y = y + x \qquad \text{und} \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

1.2 Die Assoziativgesetze

Sie werden auch als Klammergesetze bezeichnet und legen fest, wie man mit der Addition und Multiplikation von mehr als 2 Zahlen umgeht. Es besagt, dass man sich die Reihenfolge der einzelnen Operationen aussuchen kann, also Klammern beliebig gesetzt werden dürfen. Für 3 Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ schreibt man:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad \text{und} \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

1.3 Die neutralen Elemente 0 und 1

Es gibt die reellen Zahlen 0 und 1, sodass man bei Addition bzw. Multiplikation mit einem $x \in \mathbb{R}$ als Resultat wieder die Zahl x als Ergebnis erhält (die 'do-nothing-Operation'). Man schreibt:

$$x + 0 = x \qquad \text{und} \qquad x \cdot 1 = x$$

1.4 Die inversen Elemente $-x$ und x^{-1}

Es gibt zu jedem $x \in \mathbb{R}$ (Ausnahme: 0 bei der Multiplikation) eine Zahl $-x$ (das Negative) bzw. x^{-1} (das Inverse oder der Kehrwert), sodass man beim Addieren bzw. Multiplizieren das jeweilige neutrale Element erhält:

$$x + (-x) = 0 \qquad \text{und} \qquad x \cdot x^{-1} = 1$$

1.5 Das Distributivgesetz

Auch Verteilungsgesetz genannt. Es legt fest, wie die Addition und Multiplikation miteinander interagieren und es entspricht den Regeln für das Ausmultiplizieren von Klammern bzw. für das Herausheben eines gemeinsamen Faktors aus einer Summe:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

1.6 Bemerkungen

Diese 9 Regeln sehen selbstverständlich aus, wenn man bereits Übung im Umgang mit reellen Zahlen besitzt. In anderen algebraischen Strukturen kann es jedoch vorkommen, dass diese Regeln nicht alle erfüllt sind. Beispielsweise ist die Matrixmultiplikation nicht kommutativ!

Wer sich wundert, warum die Subtraktion und Division hier nicht als Grundrechenarten angegeben sind, kann beruhigt sein. Die Subtraktion ist lediglich die Addition des Negativen einer anderen Zahl. Die Rechnung $x - y$ wird also als Addition $x + (-y)$ interpretiert. Analog entspricht die Division $x : y$ der Multiplikation $x \cdot y^{-1}$ bzw. $x \cdot 1/y$.

Da für Subtraktion und Division die obigen Rechenregeln nicht uneingeschränkt gelten, sollte man diesen Umweg über die Inversen also stets im Kopf behalten! Den Konzepten von neutralen und inversen Elementen kommt dann außerdem z.B. bei der Matrizenrechnung in weiterer Folge eine fundamentale Bedeutung zu.

1.7 Konventionen

Für das Operieren mit reellen Zahlen wird vereinbart, dass eine 'Punktrechnung' (also Mal und Dividiert) immer den Vorrang gegenüber einer 'Strichrechnung' (Plus und Minus) erhält, wenn die Klammersetzung nichts anderes vorschreibt. Beim Auswerten des Terms

$$x + y \cdot z$$

muss also die Multiplikation $y \cdot z$ zuerst durchgeführt werden, bevor man ebendieses Resultat zu x addiert. Will man die Berechnungsreihenfolge ändern, muss man entsprechende Klammern setzen:

$$(x + y) \cdot z$$

Terme in Klammern bekommen bei der Auswertung stets den Vorrang (von innen nach außen gelesen, wenn mehrere verschachtelte Klammern gegeben sind), was insbesondere bei der Konsultation eines Taschenrechners wichtig ist. Sind keine Klammern gesetzt, arbeitet der Rechner nach der Punkt-vor-Strich-Regel und bei gleichberechtigten Operationen von links nach rechts.

Um Rechnungen mit Termen übersichtlicher zu machen, verzichtet man auch oft auf den Malpunkt, wenn keine Verwechslung möglich ist. Z.B. würde man xy statt $x \cdot y$ schreiben, oder bei Vorkommen einer festen Zahl im Produkt $2x$ statt $2 \cdot x$. Die Notation $x2$ wäre hier zwar nicht falsch (wegen dem Kommutativgesetz), ist aber nicht üblich, unübersichtlich und sollte besser nicht verwendet werden.

2 Vektorrechnung

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit den wichtigsten Grundlagen der Vektorrechnung. Genauer gesagt wird der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit seinen üblichen Operationen betrachtet. Man kann auch mit anderen Objekten einen Vektorraum bilden (Funktionen, Matrizen, ...), was hier aber keine Rolle spielen soll.

2.1 Was sind der $\mathbb{R}^n$ und seine üblichen Operationen?

Wir betrachten das Tripel $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ im Zusammenspiel mit den reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und ihren üblichen Operationen: Dabei kommt die Menge $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ vor, die geordnete *Tupel* von reellen Zahlen enthält.

Beispiel: Die Menge $\mathbb{R}^2$ enthält geordnete Paare $\vec{x} = (x_1, x_2)$, wobei x_1 und x_2 reelle Zahlen sind.

Bemerkung: Im Kontext der Vektorrechnung schreibt man diese Tupel (geordnete Listen von Zahlen) der Übersichtlichkeit wegen meistens untereinander (siehe unten).

Weiters gibt es zwei Operationen: $+$ nennen wir *Vektoraddition* und $\cdot$ *skalare Multiplikation* (nicht zu verwechseln mit dem Skalarprodukt!). Diese Vektoroperationen sind nicht dieselben wie für reelle Zahlen, haben aber einen ähnlichen Charakter. Sie sind wie folgt definiert:

Definition: Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zwei Elemente des $\mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, sowie $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dann sind Vektoraddition und skalare Multiplikation definiert durch:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \alpha \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Vorsicht: Obwohl dieselben Symbole verwendet werden, sind hier die Unterschiede zu Plus und Mal in $\mathbb{R}$ hervorzuheben. Bei der Vektoraddition ergeben zwei Vektoren der Dimension n einen neuen n-dimensionalen Vektor. Die Skalare Multiplikation nimmt eine Zahl (einen Skalar) und einen Vektor als input, um einen Vektor zu bilden.

2.2 Grafische Interpretation

Ein Vektor, also ein Element $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ des $\mathbb{R}^n$, sieht zunächst einfach nur aus, wie eine geordnete Liste von Zahlen mit denen gerechnet wird. Es gibt allerdings auch eine geometrische Interpretation, die die Intuition und das Arbeiten mit Vektoren erheblich erleichtert.

Vor allem in 2 und 3 Dimensionen geht das relativ einfach. Schließlich kann man $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ als Koordinaten eines Punktes in der altbekannten x-y-Ebene interpretieren bzw. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ als Punkt im Raum. Ein Vektor wird der Vorstellung gemäß nun mit einem Pfeil identifiziert, der im Koordinatenursprung beginnt und zu diesem Punkt zeigt.

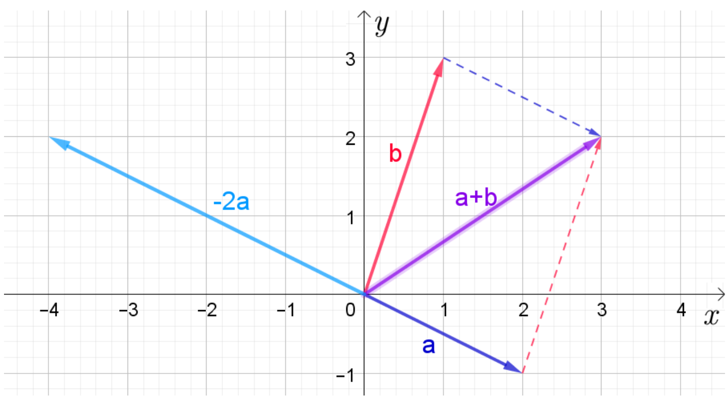
Die Addition zweier Vektoren kann man sich nun als das Aneinanderlegen zweier solcher Pfeile vorstellen. Folgt man den aneinandergereihten Pfeilen, dann landet man wieder bei einem Punkt, der seinerseits mit einem Vektor identifiziert wird.

Die Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor verlängert oder verkürzt diesen, bzw. ändert (je nach Vorzeichen der Zahl) eventuell die Orientierung des Vektors. Es erfolgt also eine Skalierung, daher der Name 'skalare Multiplikation'. Der skalierte Vektor liegt jedoch immer noch auf derselben Geraden wie der Ausgangsvektor.

Beispiel: Wir betrachten nun die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, also Elemente des $\mathbb{R}^2$.

In der Grafik sind die zugehörigen Pfeile eingezeichnet, sowie auch die Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$ und $-2 \cdot \vec{a}$.

Man sieht, dass die Vektoraddition kommutativ ist: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
(der rote am blauen Pfeil angelegt führt zum selben Punkt wie der blaue am roten angelegt).



In höheren Dimensionen ist diese Vorstellung zwar durch die dreidimensional begrenzte räumliche Wahrnehmung des Menschen eingeschränkt. Das formale mathematische Arbeiten funktioniert jedoch in jeder beliebigen Dimension ausgezeichnet!

2.3 Rechenregeln für Vektoren

Wie bereits bei den reellen Zahlen gibt es gewisse Rechenregeln, die bei der Vektoraddition und skalaren Multiplikation erfüllt sind. Die entsprechende algebraische Struktur $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ wird als *n-dimensionaler Vektorraum über die reellen Zahlen* bezeichnet. Die 8 Rechenregeln, die einen solchen Vektorraum charakterisieren, kann man sehr ähnlich interpretieren wie bei den reellen Zahlen.

Für die Vektoraddition gilt: Sie ist kommutativ, assoziativ, es gibt zu jedem $\vec{x} \in \mathbb{R}$ ein neutrales Element (den Nullvektor $\vec{0}$) und ein inverses Element $-\vec{x}$ (bzw. $-1 \cdot \vec{x}$).

Die skalare Multiplikation ist assoziativ und hat das neutrale Element 1.

Außerdem gelten für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die zwei Distributivgesetze:

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$$

$$\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$$

Man beachte, dass in der ersten Gleichung links die Addition $\alpha+\beta$ in den reellen Zahlen durchgeführt wird, auf der rechten Seite die Vektoren $\alpha \cdot \vec{x}$ und $\beta \cdot \vec{y}$ addiert werden!

2.4 Bemerkung zum Skalarprodukt

Für einige Vektorräume kann man eine weitere Operation definieren: das sogenannte *Skalarprodukt* (nicht zu verwechseln mit der skalaren Multiplikation von oben!). Bei diesem hat man zwei Vektoren als input und bildet durch die Operation einen Zahlenwert (einen sogenannten 'Skalar' aus dem zugrundeliegenden Körper $\mathbb{R}$; daher der Name).

Unglücklicherweise schreibt man für das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ oft $\vec{x} \cdot \vec{y}$, wobei jedoch ein Verständnisproblem auftreten kann. Auch wenn das Skalarprodukt gewisse Charakteristika der 'gewöhnlichen' Multiplikation aufweist, muss man klar unterscheiden – es handelt es sich hier um eine eigenständige und sehr spezielle Operation mit zwei Vektoren! Zur besseren visuellen Unterscheidung schreiben Mathematiker:innen für das Skalarprodukt meist $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Mit dem herkömmlichen Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ kann man eine Aussage über die geometrische Lagebeziehung der beiden Vektoren machen. Gilt nämlich $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, dann stehen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ im rechten Winkel zueinander (sie sind 'orthogonal'). Wir werden in diesem Dokument nicht weiter über die geometrische Bedeutung des Skalarproduktes sprechen. Allerdings ist an dieser Stelle anzumerken, dass Skalarprodukte auch als Matrixmultiplikation (siehe unten) der Form $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \cdot \vec{y}$ aufgefasst werden kann. Dabei ist $\vec{x}^T$ ein Zeilenvektor (bzw. eine $1 \times n$-Matrix), die durch Transponieren der $n \times 1$-Matrix $\vec{x}$ entstanden ist. In weiterer Folge werden deshalb Matrixprodukte im Wesentlichen durch das Bilden von Skalarprodukten berechnet (siehe unten).

2.5 Linearkombinationen

Es seien n Vektoren gegeben (also $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$) und auch n reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Eine *Linearkombination* dieser Vektoren ist ein Ausdruck der Form $\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$.
Die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ werden *Koeffizienten der Linearkombination* genannt.

Beispiel: Eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aus dem Beispiel oben könnte z.B. so aussehen:

$$3 \cdot \vec{a} + (-2) \cdot \vec{b} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ -3 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Jede Linearkombination bildet damit also wieder einen Vektor.

Wenn $\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$ dann spricht man davon, dass $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ den Vektor $\vec{x}$ *erzeugen*. Wichtig ist oft die Frage nach der eindeutigen Darstellbarkeit von $\vec{x}$ bei gegebenen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. In bestimmten Situationen kann man das Resultat einer Matrixmultiplikation als Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrix angeben, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

2.6 Lineare Unabhängigkeit

Man betrachte n Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ und versuche den Nullvektor $\vec{0}$ (enthält nur Nullen) durch eine Linearkombination der Vektoren zu erreichen. Das heißt, dass man eine Lösung der Gleichung $\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ sucht.

Wenn die Gleichung nur die Lösung $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ besitzt (alle Koeffizienten sind 0), dann nennt man diese Familie von Vektoren *linear unabhängig*.

Bemerkung: Wenn die n Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind, dann gibt es eine eindeutige Linearkombination (alle Koeffizienten α_i sind also eindeutig bestimmt), um jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ zu erzeugen. In diesem Fall nennt man die Familie $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ eine *Basis* des $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Es hängt von der linearen Unabhängigkeit der entsprechenden Vektoren ab, ob ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder nicht − mehr dazu später.

3 Matrizen

Im Folgenden wird nur auf die allerwichtigsten Aspekte eingegangen, die notwendig sind, um lineare Gleichungssysteme besser zu verstehen. Prinzipiell beschäftigen uns hier nur mit Matrizen, die reelle Zahlen als Einträge haben.

3.1 Was ist eine Matrix?

Eine Matrix kann man als Zahlenschema verstehen (ähnlich einer rechteckige Tabelle), das m Zeilen und n Spalten besitzt ('m mal n Matrix'). m und n nennt man die *Dimensionen* der Matrix.

Man schreibt für so eine Matrix A auch $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, was bedeutet, dass diese $m \times n$-Matrix reelle Zahlen als Einträge besitzt. Um eine effiziente Notation zu gewährleisten wird folgende Schreibweise für den Eintrag von A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte verwendet: $(A)_{ij} = a_{ij}$.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat im Allgemeinen also die folgende Gestalt: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

3.2 Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (die also die gleichen Dimensionen aufweisen) kann man nach der gleichen Logik wie Vektoren addieren (Einträge von A und B an der gleichen Stelle werden addiert).

Ebenso gibt es für eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ eine skalare Multiplikation $\alpha \cdot A$ (alle Einträge von A werden mit α multipliziert).

Weil die im Kapitel über Vektoren angeführten Eigenschaften ebenso für Matrizen mit diesen beiden Operationen gelten, ist $(\mathbb{R}^{m \times n}, +, \cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (d.h. die in Abschnitt 2.3 angegebenen Rechenregeln werden auch von Matrizen erfüllt).

3.3 Matrixmultiplikation:

Unter gewissen Voraussetzungen kann man auch eine Multiplikation von Matrizen untereinander definieren. Die Matrixmultiplikation stellt sogar das operative Herzstück der linearen Algebra dar und erlaubt uns eine endlose Vielfalt an Anwendungen, ohne die komplexere computergestützte Berechnungen unmöglich wären.

Definition: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ zwei Matrizen. Dann ist deren Produkt $A \cdot B$ bzw. AB ein Element des $\mathbb{R}^{m \times p}$, dessen Einträge $(AB)_{ij}$ definiert werden durch

$$(AB)_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Erklärung: Diese Definition sieht komplizierter aus, als sie ist. Der erste Satz schafft die nötigen Voraussetzungen für die Matrixmultiplikation und besagt, dass wir eine $m \times n$-Matrix A und eine $n \times p$-Matrix B benötigen. Konkret heißt das: A muss gleich viele Spalten haben, wie B Zeilen hat.

Man spricht auch davon, dass die 'inneren Dimensionen' übereinstimmen, also den Wert n haben. Die resultierende Matrix $AB = A \cdot B$ hat dann m Zeilen und p Spalten ('äußere Dimensionen').

Die Formel zur Berechnung kann man so verstehen: $(AB)_{ij}$ ist der Eintrag von AB in der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Man berechnet ihn durch paarweises Multiplizieren der Einträge in der i-ten Zeile von A und j-ten Spalte von B und dem anschließenden Aufsummieren dieser Produkte. Das folgende Schema soll diese Berechnung verdeutlichen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{m \times n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & & \dots \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{pmatrix}}_{B \in \mathbb{R}^{n \times p}} = \underbrace{\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}}_{AB \in \mathbb{R}^{m \times p}}$$

Beachte: Für die Berechnung von nur einem einzigen Eintrag des Produkts AB (einen Eintrag $(AB)_{ij}$) braucht man also alle Einträge von A in der i-ten Zeile und alle Einträge von B in der j-ten Spalte! Genauer gesagt wird das Skalarprodukt aus dem i-ten Zeilenvektor von A und dem j-ten Spaltenvektor von B gebildet:

$$(AB)_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Will man also die ganze Produktmatrix AB bestimmen, so muss man insgesamt $m \cdot n$ verschiedene Skalarprodukte ausrechnen.

3.4 Matrixabbildungen

Ein wichtiger Spezialfall ist die Operation 'Matrix-mal-Vektor': (Spalten-)Vektoren kann man als $n \times 1$-Matrix auffassen, weswegen für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ die Multiplikation $A \cdot \vec{x}$ wohldefiniert ist und das Produkt $A\vec{x} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ wieder ein Vektor ist (allerdings ein Vektor der Dimension m).

Ein Vektor kann durch die Matrixmultiplikation also auf einen anderen Vektor abgebildet werden. Dieser Umstand spielt bei einer riesigen Vielzahl von Anwendungen eine große Rolle (z.B. bei linearen Gleichungssystemen, der zeitlichen Entwicklung dynamischer Systeme, etc.). Formal würde man schreiben, dass durch die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ induziert wird.

In Abschnitt 5 wird kurz auf Funktionen bzw. Abbildungen eingegangen, aber Näheres soll hier nun nicht erläutert werden. Zunächst ist nur wichtig zu wissen, dass die Matrix A einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ in einen Vektor $A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ transformiert.

Bemerkung: Die Matrixmultiplikation ist assoziativ. Man stelle sich nun vor, dass auf einen Vektor $\vec{x}$ insgesamt n Abbildungen (Funktionen/Transformationen) hintereinander wirken, die durch die Matrixmultiplikationen mit den Matrizen $A_1, A_2, \dots, A_n$ (mit den geeigneten Matrixdimensionen und in dieser Reihenfolge) realisiert werden.

Man würde dann einen neuen Vektor $\vec{y}$ durch die untenstehende Multiplikationskette erhalten. Diese ist so zu verstehen, dass zuerst A_1 mit $\vec{x}$ multipliziert wird, danach A_2 mit diesem Ergebnis, usw. und zuletzt A_n mit dem Ergebnis der vorhergehenden Multiplikationen.

$$\vec{y} = (A_n \dots (A_2 (A_1 \vec{x})) \dots)$$

Wegen der Assoziativität der Matrixmultiplikation kann man die Klammern auch anders setzen und das Produkt aller Matrizen zu einer einzigen Transformationsmatrix T zusammenfassen:

$$\vec{y} = (A_n \dots A_2 A_1) \vec{x} = T \vec{x}$$

3.5 Die Einheitsmatrix

Das neutrale Element der Matrixmultiplikation ist die *Einheitsmatrix* E (oft auch *inverse Matrix* I genannt). Sie ist eine quadratische Matrix, besitzt also gleich viele Zeilen wie Spalten (n Zeilen und Spalten). Man schreibt unter Miteinbeziehung der Dimension n demnach auch $E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

E_n hat die Einträge 1 in ihrer sogenannten *Hauptdiagonale* und überall sonst die Einträge 0. Man nennt eine Matrix, die nur in der Hauptdiagonale Einträge ungleich 0 hat auch *Diagonalmatrix*:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Man kann die Einträge der $n \times n$-Einheitsmatrix auch mit dem *Kronecker-Delta* δ_{ij} angeben. Man schreibt dann für einen Eintrag $(E_n)_{ij}$ in der i-ten Zeile und j-ten Spalte: $(E_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Die Multiplikation der geeigneten Einheitsmatrix (passende Dimension!) mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (bzw. mit einem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$) liefert stets wieder die Matrix A (bzw. den Vektor $\vec{v}$):

$$E_m \cdot A = A \cdot E_n = A \qquad \text{bzw.} \quad E_n \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot E_1 = \vec{v}$$

Bemerkung: Eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, deren Einträge alle α sind (also $D = \operatorname{diag}(\alpha, \dots, \alpha)$ bzw. $D = \alpha \cdot E_n$) bewirkt lediglich eine Skalierung des Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Das entspricht einfach der skalaren Multiplikation von α mit $\vec{x}$, d.h. $D \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x}$.

4 Lineare Gleichungssysteme

Ein Hauptanwendungsgebiet der Matrizenrechnung ist die Behandlung von *Linearen Gleichungssystemen* (LGS). In der Schule lernt man LGS mit m Gleichungen und n Unbekannten x_i (gesuchte reelle Zahlen) in der folgenden Form kennen, wobei a_{ij} und b_i bekannte reelle Zahlen sind:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Man kann dieses LGS nun auch als Linearkombination von n Vektoren schreiben, die einen Vektor $\vec{b}$ ergeben.

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Und schließlich kann man daraus sogar eine Matrixmultiplikation der Form $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ machen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \quad (A \mid \vec{b}) \;\Leftrightarrow\; \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Hierbei nennt man $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die *Koeffizientenmatrix*, $\vec{x}$ den *Lösungsvektor* und $\vec{b}$ den *Störvektor*. Die kurze Darstellung rechts wird *erweiterte Koeffizientenmatrix* genannt.

Beachte: Man sieht hier also, dass man eine Linearkombination von n Vektoren der Dimension m als Matrixmultiplikation anschreiben kann.

Die im Folgenden beschriebenen Konzepte zur linearen Unabhängigkeit und zu inversen Matrizen beschäftigen sich nun mit den Fragen, ob man einen oder mehrere dieser Vektoren durch die anderen darstellen kann, was wiederum mit der (eindeutigen) Lösbarkeit von LGS verknüft ist.

4.1 Wie löst man ein LGS?

Ein Gleichungssystem kann durch den sogenannten *Gauß-* oder den *Gauß-Jordan-Algorithmus* gelöst werden, falls es Überhaupt lösbar ist. Diese Algorithmen sind einander recht ähnlich und werden hier nicht genau angeführt. Die Verfahren beruhen auf den folgenden Operationen, die sogenannten *elementaren Zeilenumformungen*, mit denen man die erweiterte Koeffizientenmatrix äquivalent umformen kann. Man darf...

1.) ... zwei Zeilen vertauschen,

2.) ... eine Zeile mit einer Zahl ungleich 0 multiplizieren (bzw. dividieren),

3.) ... zwei Zeilen addieren oder subtrahieren.

Man kann 2. und 3. auch kombinieren und Vielfache zweier Zeilen addieren. Die Umformungen selbst entsprechen dabei demselben Schema, wie der Gauß-Algorithmus in der Schule; mit dem einzigen Unterschied, dass man die Unbekannten nicht immer explizit anschreibt. Der Algorithmus lässt sich auch wunderbar auf einem Computer umsetzen.

Wenn das LGS eine eindeutige Lösung besitzt, dann kann man mit diesen Umformungen das LGS systematisch derart bearbeiten, dass in der umgeformten erweiterten Koeffizientenmatrix links eine Einheitsmatrix steht und rechts der Lösungsvektor (also $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T$).

Bemerkung: Das hochgestellte T bei einer Matrix, also z.B. bei A^T, steht für die Transposition. Die Transponierte Matrix A^T hat die Zeilenvektoren von A als Spalten. Der Vektor im obigen Absatz ist als transponierter Zeilenvektor angeschrieben, was einem Spaltenvektor entspricht. In Kurzschreibweise gilt für die transponierte Matrix A^T, dass $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$.

Beispiel: Gesucht ist die (hier eindeutige) Lösung $\vec{x} = (x, y, z)^T$ des folgenden LGS:

$$\begin{array}{lrrl} \text{I.} & 2x + y & -z = & 3 \\ \text{II.} & -x + 3y & +4z = & -5 \\ \text{III.} & x & -3z = & 2 \end{array}$$

Da es aber egal ist, ob man die Einträge des Lösungsvektors mit x, y und z oder mit Franz, Josef und Ferdinand bezeichnet, reicht die erweiterte Koeffizientenmatrix zur Beschreibung aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Nun suchen wir mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren eine Lösung des LGS durch Anwenden der elementaren Zahlenumformungen (mehrere äquivalente Lösungswege sind hier möglich). Zwei Schritte werden gleich gemeinsam ausgeführt: Zuerst wird hier Zeile III zu Zeile II addiert (II + III) sowie das doppelte von Zeile II von Zeile I abgezogen ($\text{I} - 2 \cdot \text{II}$) – Zeile II bleibt unverändert. Anschließend subtrahieren wir das dreifache der neuen Zeile I von der neuen Zeile II (d.h. $\text{II} - 3 \cdot \text{I}$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Hier ist bereits klar, dass $z = 0$, weil in der zweiten Zeile sinngemäß $0 \cdot x + 0 \cdot y - 14 \cdot z = 0$ steht. Wir fahren hier formal fort, indem wir zunächst die Zeilen zu einer Stufenform vertauschen und dann Zeile III mit $-\frac{1}{14}$ multiplizieren. Zuletzt formen wir durch $\text{I} + 3 \cdot \text{III}$ und $\text{II} - 5 \cdot \text{III}$ um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Alternativ hätte man hier nach dem Erreichen der Stufenform von unten beginnend das Teilresultat $z = 0$ ablesen können, weiters $z = 0$ eine Zeile darüber in $0 \cdot x + 1 \cdot y + 5 \cdot z = -1$ einsetzen können, um $y = -1$ zu berechnen. Auf diese Art fährt man fort, bis man in Zeile I angelangt ist. So weit, so simpel – ob sich aber jedes beliebige LGS überhaupt (eindeutig) lösen lässt, ist durch diesen Algorithmus noch nicht klar.

4.2 Die Determinante einer Matrix und die Lösbarkeit eines LGS

Wenn A eine quadratische Matrix ist (also $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$), dann kann man die sogenannte *Determinante* von A berechnen, die A einen skalaren Zahlenwert zuordnet. Man schreibt dafür $\det(A)$.

Für $n = 2$ ergibt sich die Determinante zu $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ und bei $n = 3$ wendet man die *Regel von Sarrus* an. Die Berechnung der Determinate von Matrizen der Dimension $n \geq 4$ wird zunehmend aufwendiger und gelingt mit dem *Laplaceschen Entwicklungssatz*. Zu dessen Anwendung findet man in der Literatur genügend Infos.

Ein LGS der Form $A\,\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\det(A) \neq 0$. Äquivalent dazu ist die Aussage, dass die Spalten von A linear unabhängig sind.

Das genannte LGS hat hingegen unendlich viele Lösungen, wenn $\det(A) = 0$ bzw. wenn die Spalten von A linear abhängig sind. Beim Gauß-Algorithmus tauchen in diesem Fall eine oder mehrere Nullzeilen auf.

4.3 Lineare Unabhängigkeit feststellen

Für eine Familie von n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ kann wie folgt ermittelt werden, ob sie linear unabhängig ist:

Man bildet eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, in der man die gegebenen Vektoren in die einzelnen Spalten schreibt. Anschließend versucht man das LGS $A\,\vec{x} = \vec{0}$ nach $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ zu lösen. Das ist lediglich eine andere Schreibweise der Gleichung $x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$ aus der Definition der linearen Unabhängigkeit (siehe Kapitel 2.5).

Die einzelnen Einträge von $\vec{x}$ entsprechen also den Koeffizienten der Linearkombination $x_1\vec{v_1} + \cdots + x_n\vec{v_n}$. Wenn alle x_i Null sein müssen, damit $A\vec{x} = \vec{0}$ gilt, ist die Definition erfüllt.

Wenn nicht alle x_i Null sind, dann ist die Familie linear abhängig, d.h. man kann einen oder mehrere der gegebenen Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen. Eine solche Darstellung ergibt sich direkt aus der oben beschriebenen Vorgangsweise, da in diesem Fall beim Lösen von $A\vec{x} = \vec{0}$ in einer oder mehreren Zeilen der Koeffizientenmatrix ein Zusammenhang zwischen den Koeffizienten auftaucht.

Im Folgenden ein Beispiel, in dem drei Vektoren auf lineare Unabhängigkeit überprüft werden sollen. Die drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind hier bereits in den Spalten einer Matrix A eingetragen, die Gleichung $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ wurde in der Matrixdarstellung $A\vec{x} = \vec{0}$ angeschrieben und gemäß der elementaren Zeilenumformungen so weit wie möglich reduziert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus Zeile 1 und 2 gewinnt man so die Beziehungen $x_1 = -2x_2$ und $x_3 = x_1$. Anders gesagt hängen der erste und der dritte Koeffizient von x_2 ab. Setzt man diese Koeffizienten (abhängig von x_2) nun in die obige Gleichung ein, so erhält man $-2x_2\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_2\vec{v}_3 = \vec{0}$.

Diese Gleichung lässt sich nun auf einen der drei Vektoren umformen, wobei sich der Faktor x_2 wegkürzt. Nun lässt sich z.B. $\vec{v}_3$ folgendermaßen ausdrücken:

$$\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Durch die Matrix A ist hier natürlich automatisch eine Abbildung mit $f_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ festgelegt. Einen Vektor $\vec{x}$ in die Abbildung einzusetzen ist nicht schwer und mit einer kurzen Matrixmultiplikation erledigt. Oft ist man aber an der umgekehrten Frage interessiert:

Gegeben ist ein Vektor $\vec{b}$, von dem wir vermuten, dass er ein Funktionswert von f_A ist, d.h. dass für ein $\vec{x}$ aus dem Definitionsbereich von f_A gibt, dass $A\vec{x} = \vec{b}$. Zu beantworten ist die Frage, für welche Vektoren $\vec{x}$ das gilt.

Wenn wir für die Matrix im vorhergehenden Beispiel die Determinante von A bestimmt, so findet man $\det(A) = 0$, weshalb diese Antwort schon einmal nicht eindeutig sein kann. Für $\vec{b} = \vec{0}$ haben wir diese Frage ja bereits gelöst. Wenn wir anstelle von x_2 den Parameter $\lambda := x_2$ einführen und in die vorhergehende Gleichung einsetzen, so erhalten wir:

$$-2\lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_3 = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda \cdot (-2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{0}$$

Die Linearkombination in der Klammer ergibt natürlich wieder einen Vektor, den wir $\vec{w} := -2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ nennen wollen. Was ist hier nun zu sehen? Offenbar ergibt λ mal $\vec{w}$ den Nullvektor, wobei jedoch λ ein Stellvertreter für jede beliebige reelle Zahl ist. Wir haben es hier mit der Parameterdarstellung einer Geraden zu tun, welche die Lösungsmenge unseres LGS ist! Diese Gerade geht durch den Koordinatenursprung und zeigt in Richtung $\vec{w}$. Jeder Vektor auf dieser Geraden ist also eine Lösung unserer Frage - und es gibt unendlich viele davon!

Im Allgemeinen, wenn $\vec{b} \neq \vec{0}$, dann ist der Ursprung nicht in dieser Lösungsmenge enthalten. Wenn die Matrix andere (höhere) Dimensionen hätte und sich unendlich viele Lösungen ergeben, dann spricht man auch nicht mehr zwingend von Geraden, sondern z.B. von Hyperebenen und Ähnlichem. Das sind ganz spezielle Teilmengen im $\mathbb{R}^n$, die einem höherdimensionalen Analogon zu Geraden, Ebenen, etc. entsprechen (sogenannte affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$).

4.4 Inverse Matrix

Noch einfacher kann man ein LGS lösen, wenn die sogenannte *inverse Matrix* A^{-1} der (quadratischen) Koeffizientenmatrix A bekannt ist.

Damit diese existiert, muss gelten, dass $\det(A) \neq 0$ und die Lösung damit eindeutig ist. Wenn das erfüllt ist, dann nennt man A eine *invertierbare Matrix* bzw. eine *reguläre Matrix*.

Die inverse Matrix verhält sich, wie der Name bereits sagt, wie ein inverses Element bezüglich der Matrixmultiplikation (genauer gesagt induziert A^{-1} eine Umkehrabbildung zu $f_A(\vec{x}) = A\vec{x}$). Es gilt also für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$$

Wenn A bekannt ist und A^{-1} berechnet werden soll, dann kann man diese Eigenschaft ausnutzen und die Gleichung umformen, indem man von links mit A^{-1} multipliziert:

$$(A \mid E_n) \quad \Leftrightarrow \quad (A^{-1} \cdot A) \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot E_n \quad \Leftrightarrow \quad E_n \cdot A^{-1} = A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (E_n \mid A^{-1})$$

Von links nach rechts gelesen kann man das so interpretieren: Man startet mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A \mid E_n)$ und wendet den Gauß-Algorithmus an, bis man $(E_n \mid A^{-1})$ erhält kann dann die inverse Matrix auf der rechten Seite ablesen.

Ist eine zu A inverse Matrix bekannt, dann kann man das LGS der Form $A\,\vec{x} = \vec{b}$ einfach durch Multiplikation von links mit A^{-1} lösen:

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}\,A\,\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

5 Mengenlehre und Abbildungen

In diesem Abschnitt werden die nötigsten Grundlagen der naiven Mengenlehre anschaulich erklärt.

5.1 Was ist eine Menge?

Für ein Grundverständnis von Mengen eignet sich die ursprüngliche Definition von Georg Cantor:

Unter einer Menge M verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.

5.2 Übliche Schreibweisen

Mengen werden üblicherweise mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet: $A, B, \ldots, M, \ldots$

Mengen mit abzählbar vielen Elementen kann durch Auflistung (einiger) Elemente definiert werden, solange klar ist, welche Elemente zur Menge gehören. Man verwendet hierfür eine Liste innerhalb von geschweiften Klammern. Beispiele:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \qquad B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

Vielfach muss man die beschreibende Schreibweise verwenden, wenn man die Elemente nicht aufzählen, sie aber anhand einer Regel oder Vorschrift beschreiben kann. Beispiele von oben:

$$A = \{a \in \mathbb{N}_0 \,:\, 0 \leq a \leq 10\} \qquad B = \{b \in \mathbb{N}_0 \,:\, b \text{ ist gerade}\}$$

In dieser Schreibweise wird links vom Doppelpunkt (oft auch ein vertikaler Strich) ein Name zur Beschreibung von Elementen dieser Menge, sowie eine Grundmenge aus der diese Elemente sind eingeführt. Rechts vom Doppelpunkt steht eine Vorschrift, die die Elemente der Menge erfüllen.

Bei A würde man sagen: 'B ist die Menge aller natürlichen Zahlen b für die gilt, dass b gerade ist.'

Um zu kennzeichnen, dass ein Objekt a ein Element einer Menge A ist, schreibt man $a \in A$ (a ist Element von A). Gegenteiliges gibt man durch $a \notin A$ an.

Die Menge, die keine Elemente enthält heißt leere Menge. Man schreibt $\varnothing$ oder $\{\}$.

Reelle Intervalle: Hierfür gibt es abgekürzte Schreibweisen, bei denen zwischen runden bzw. eckigen Klammern die Intervallgrenzen von offenen bzw. geschlossenen Intervallen stehen. Offen bedeutet, dass die Intervallgrenze nicht in der Menge enthalten ist. Halboffene Intervalle haben auf der einen Seite eine Runde und auf der anderen eine eckige Klammer. Typischerweise werden Buchstaben wie I und J für Intervalle verwendet. Beispiel:

$$I = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \leq 1\} = (0,\, 1]$$

5.3 Beziehungen zwischen Mengen und Mengenoperationen

Es seien A und B zwei Mengen. Wenn jedes Element von A auch in B ist, dann schreibt man $A \subseteq B$ (A ist *Teilmenge* von B). Wenn die Mengen zusätzlich nicht gleich sind, dann spricht man von einer echten Teilmenge.

Operationen: Durch spezielle Operationen erhält man aus A und B wiederum Mengen:

- Der *Durchschnitt* $A \cap B$ der beiden Mengen enthält alle Elemente, die in A und in B sind.
- Die *Vereinigung* $A \cup B$ enthält alle Elemente, die in A, in B oder in beiden gleichzeitig sind.
- Die *Differenzmenge* (bzw. das *Komplement* von B relativ zu A) wird $A \setminus B$ geschrieben. Sie enthält alle Elemente, die in A, aber nicht in B sind.

5.4 Funktionen

Funktionen oder Abbildungen sind ein Herzstück der Mathematik und in ihr allgegenwärtig. Eine Funktion f besitzt drei Bestimmungsstücke: Die *Definitionsmenge* D, die *Bildmenge* (oder *Wertemenge*) B und eine Zuordnungsvorschrift.

Die Vorschrift ordnet jedem $x \in D$ eindeutig ein Element $f(x) \in B$ zu. Wenn das durch eine Formel erfolgt, dann spricht man von einer *Funktionsgleichung*. Schreibweise für Funktionen:

$$f : D \to B, \quad x \mapsto f(x)$$

Man spricht: f bildet von D nach B ab. x wird abgebildet auf $f(x)$. Dabei wird x *Argument* und $f(x)$ *Funktionswert* genannt.

Beispiel: Eine Funktion f ordnet jedem/jeder ÖsterreicherIn $x \in D$ (Menge aller österreichischen BürgerInnen) eine Sozialversicherungsnummer aus der Menge B aller SV-Nummern zu.

Die Menge enthält dabei zehnstellige Nummern nach einem bestimmten Schema (4-stellige Laufnummer und Geburtsdatum). Die Zuordnungsvorschrift könnte hier eine Tabelle oder Liste sein, in der alle Paare von Mensch plus SV-Nummer stehen.

Wenn man über Funktionen spricht meint man sehr oft solche, die von und auf Mengen von Zahlen oder Zahlentupeln abbilden (z.B. von/auf Intervallen, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n, \dots$).

Folgen: Unter einer reellen Folge a versteht man eine Funktion von den natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen: $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \;\; n \mapsto a(n)$. Man schreibt üblicherweise a_n statt $a(n)$.

Funktionsgraph: Der Graph einer Funktion ist oft die erste Assoziation mit dem Begriff. Der Graph ist jedoch nicht einfach eine Kurve in einem Koordinatensystem, sondern die Menge aller Paare $(x, f(x))$ aus dem Argumentwert x und dem zugehörigen Funktionswert $f(x)$.

Für den Fall, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kann man diese Paare tatsächlich in einem ebenen Koordinatensystem darstellen. Bei vielen Funktionen erhält man sogar eine durchgehende Kurve dabei. Das ist aber längst nicht immer der Fall! Man stelle sich bloß eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vor. Der Graph einer solchen Funktion wäre hier interpretationsgemäß eine Fläche im Raum. Bei vielen Funktionen lässt sich der Graph wider dem Namen überhaupt nicht sinnvoll grafisch darstellen.

6 Spezielle reelle Funktionen

Im Folgenden werden wir uns einige Grundtypen von Funktionen ansehen, die sogenannten elementaren Funktionen. Mit ihnen kann man bereits eine große Vielfalt an Zusammenhängen modellieren. Nicht erklärt werden hier die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen, die man aus der Exponentialfunktion ableiten kann.

6.1 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind die wichtigsten, stetigen Funktionen auf den reellen Zahlen, da man aus ihnen (durch Linearkombination von Potenzfunktionen) alle anderen hier behandelten Funktionen ableiten kann.

Eine Potenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt stets eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = x^n$.

Zunächst werden wir nur natürliche Exponenten betrachten, also den Fall $n \in \mathbb{N}_+$. Hier lohnt sich die Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden Exponenten n, sowie zwischen verschiedenen Bereichen der Definitionsmenge (Fall $|x| < 1$ und Fall $|x| > 1$).

Potenzfunktionen mit geraden Exponenten ($n = 2, 4, 6, \dots$) besitzen nur nichtnegative Funktionswerte und deren Graphen sind spiegelsymmetrisch zur vertikalen Achse ('gerade Funktion'). Jene mit ungeraden Exponenten können jede reelle Zahl als Funktionswert annehmen und deren Graphen sind punktsymmetrisch zum Ursprung ('ungerade Funktion').

Für alle diese Potenzfunktionen gilt, dass $1^n = 1$, also der Funktionswert an der Stelle $x = 1$ der Wert 1 ist. Für $|x| > 1$ (also $x < -1$ oder $x > 1$) gilt, dass der Graph umso steiler ist, je höher die Potenz ist. Das heißt, dass sich die Funktionswerte umso drastischer verändern, je weiter man sich von $x = 0$ entfernt. Umgekehrt gilt für $|x| < 1$ (also für $-1 < x < 1$), dass die Funktionen mit höherer Potenz in diesem Bereich flacher verlaufen.

Im Folgenden nun die Funktionsgraphen einiger Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten im Vergleich. Links jene für n gerade, rechts für n ungerade: